

Mission BepColombo

Mohamed Afekir (cpgeafek@gmail.com)

École Royale de l'Air

CPGE - Marrakech

Partie 1

Mouvement dans le champ gravitationnel d'une planète

1. Champ gravitationnel

La distribution de masse (D) est à symétrie sphérique:

$$\vec{\mathcal{G}}(M) = \vec{\mathcal{G}}(r, \theta, \varphi)$$

Invariance La distribution (D) est invariante par rotation de θ autour de \vec{e}_φ et par rotation de φ autour de \vec{e}_z ; $\vec{\mathcal{G}}$ est indépendant de θ et de φ :

$$\vec{\mathcal{G}}(M) = \vec{\mathcal{G}}(r)$$

Symétrie Le plan $\Pi(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et le plan $\Pi'(M, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_r)$ sont deux plans de symétrie de la distribution (D):

$$\vec{\mathcal{G}}(M) \in (\Pi \cap \Pi') \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathcal{G}}(M) = \mathcal{G}(r) \vec{e}_r$$

Gauss La surface de Gauss (Σ) est la sphère de centre O_p et de rayon r :

$$\oiint \vec{\mathcal{G}}(M) \cdot \vec{d}\Sigma = -4\pi GM_{int} = \mathcal{G}(r) \times 4\pi r^2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{G}(r) = -\frac{GM_{int}}{r^2}$$

$$\vec{\mathcal{G}}(M) = -\frac{GM_{int}}{r^2} \vec{e}_r$$

2. Champ créé au point M situé à la distance r de l'espace:

$$\text{pour } r > R_p \quad ; \quad M_{int}(r) = M_p \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathcal{G}}(M) = -\frac{GM_p}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\text{pour } r < R_p \quad ; \quad M_{int}(r) = M_p \left(\frac{r^3}{R_p^3} \right) \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathcal{G}}(M) = -\frac{GM_p}{R_p^3} \vec{r}$$

3. Force gravitationnelle:

$$\vec{F} = m \vec{\mathcal{G}}(M) = -\frac{GmM_p}{r^2} \vec{e}_r$$

4. \vec{F} est dite force centrale car sa direction est dirigé vers le centre de force.

Le théorème du moment cinétique appliqué à M dans le référentiel \mathcal{R}_p :

$$\frac{d\vec{L}_{O_p}}{dt} = \mathcal{M}_{O_p}(\vec{F}) = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_{O_p} \text{ est une constante vectorielle.}$$

La trajectoire de M est plane.

La surface de la trajectoires est le plan perpendiculaire au moment cinétique $\vec{L}_{O_p} = \vec{Cte} = \vec{L}(t=0)$.
Le plan du mouvement est, alors, déterminé par $(\vec{r}(t=0), \vec{v}(t=0))$.

5. L'énergie potentielle:

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{GmM_p}{r^2} dr = -dE_p \quad \text{avec} \quad d\vec{r} = dr \vec{e}_r + d\vec{r}_\perp$$

$$E_p = -\frac{GmM_p}{r} \quad ; \quad E_p(\infty) = 0$$

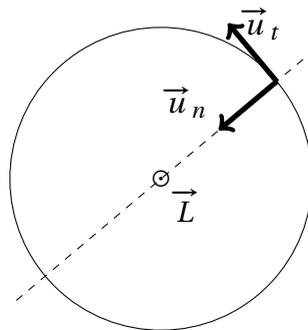
6. L'énergie mécanique:

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM_p}{r}$$

7. Vitesse de libération ou vitesse minimale à communiquer à l'engin spatial pour s'échapper à l'attraction de la planète. Cette vitesse correspond à l'état libre de l'engin: $E_m(r = R_p) \geq 0$.

$$E_m(R_p, v_\ell) = 0 \quad \text{pour} \quad v_\ell = \sqrt{\frac{2GM_p}{R_p}}$$

8. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à M , soumis à la seule force \vec{F} , dans le \mathcal{R}_p s'écrit dans la base de Frenet $(\vec{u}_t, \vec{u}_n, \vec{u}_L)$; $\vec{u}_L // \vec{L}$:



$$\vec{F} = m \vec{a}_{M/\mathcal{R}_p} = \frac{v^2}{r} \vec{u}_n + \frac{dv}{dt} \vec{u}_t$$

\vec{F} est centrale; $\vec{F} // \vec{u}_n$:

$$\frac{dv}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \text{constante} \quad \Rightarrow \quad \text{mouvement circulaire uniforme}$$

9. Expression de v_o et loi de Kepler:

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{GmM_p}{r} \quad \Rightarrow \quad v_o = \sqrt{\frac{GM_p}{r_o}}$$

Loi de Kepler

$$v_o = \frac{2\pi r_o}{T_o} = \sqrt{\frac{GM_p}{r_o}} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_o^2}{r_o^3} = \frac{4\pi^2}{GM_p} = cte$$

10. Énergie cinétique:

$$E_{co} = \frac{1}{2} m v_o^2 = \frac{GmM_p}{2r_o}$$

11.

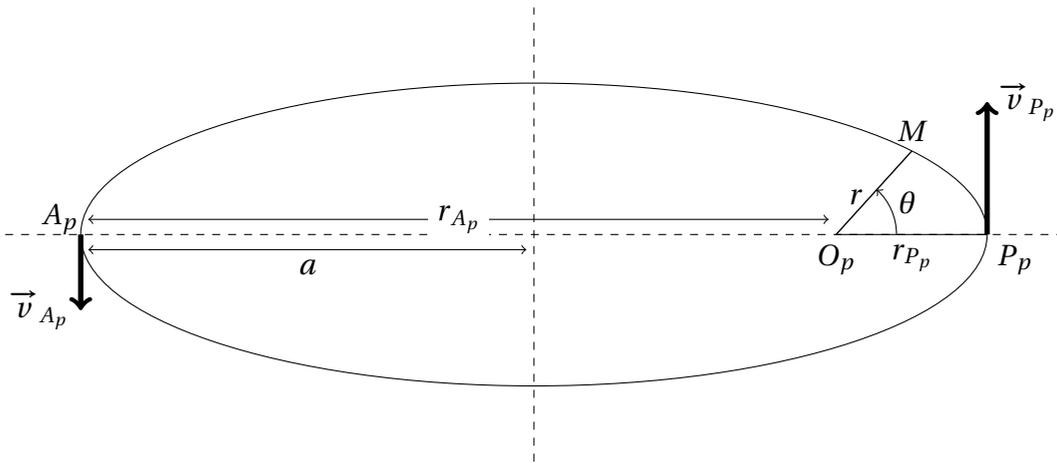
$$E_{co} = -\frac{E_{po}}{2} \quad \text{et} \quad E_{co} = -E_{mo}$$

Commentaire: le signe négatif de E_{mo} est du au fait qu'il s'agit d'un système dans un état lié.

Partie 2 Mission BepiColombo

1. Caractéristique d'une trajectoire elliptique

1.1.



1.2. Conservation du moment cinétique:

$$\vec{L}_{O_p}(M \equiv A_p) = \vec{L}_{O_p}(M \equiv P_p) \quad \Rightarrow \quad r_{A_p} \times v_{A_p} = r_{P_p} \times v_{P_p}$$

1.3. Apogée et Périgée:

$$r_{P_p} = r(\theta = 0) = \frac{p}{1 + e} \quad \Rightarrow \quad r_{A_p} = r(\theta = \pi) = \frac{p}{1 - e}$$

1.4. Conservation de l'énergie mécanique:

$$E_m = \frac{1}{2} m v_{P_p}^2 - \frac{GmM_p}{r_{P_p}} = \frac{1}{2} m v_{A_p}^2 - \frac{GmM_p}{r_{A_p}} = \frac{1}{2} m v_{P_p}^2 \frac{r_{P_p}^2}{r_{A_p}^2} - \frac{GmM_p}{r_{A_p}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} m v_{P_p}^2 = \frac{GmM_p}{r_{A_p} + r_{P_p}} \frac{r_{A_p}}{r_{P_p}}$$

$$E_m = \frac{1}{2} m v_{P_p}^2 - \frac{GmM_p}{r_{P_p}} = \frac{GmM_p}{2a} \frac{r_{A_p}}{r_{P_p}} - \frac{GmM_p}{r_{P_p}} = -\frac{GmM_p}{2a} \underbrace{\left(\frac{2a - r_{A_p}}{r_{P_p}} \right)}_{=1}$$

$$E_m = -\frac{GmM_p}{2a}$$

1.5.

$$E_m = -\frac{GmM_p}{2a} = \frac{1}{2}mv_{P_p}^2 - \frac{GmM_p}{r_{P_p}} = \frac{1}{2}mv_{A_p}^2 - \frac{GmM_p}{r_{A_p}}$$

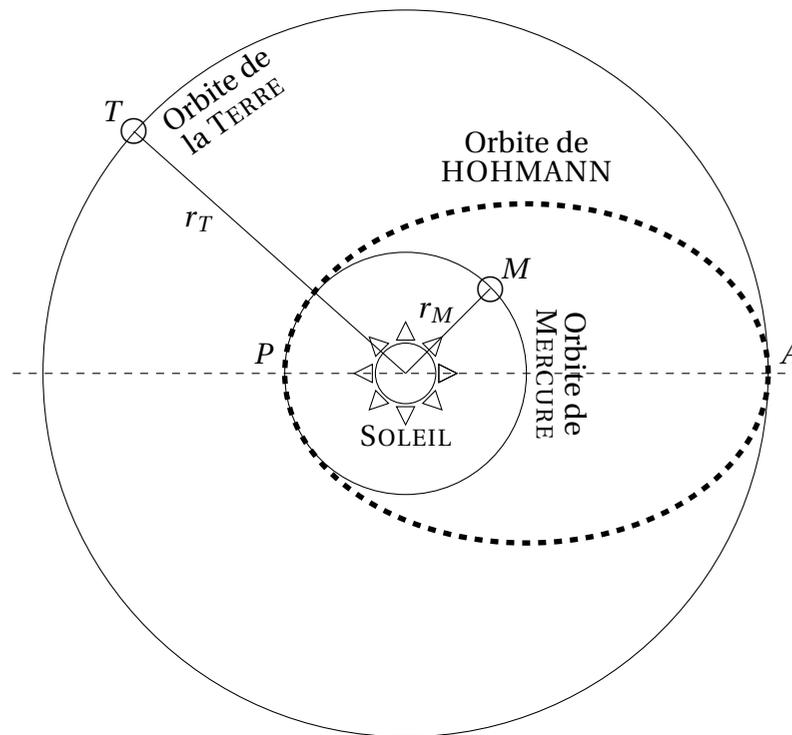
$$\Rightarrow \begin{cases} v_{A_p} = \sqrt{2GM_p \left(\frac{1}{r_{A_p}} - \frac{1}{2a} \right)} = \sqrt{\frac{GM_p}{p}}(1+e) \\ v_{P_p} = \sqrt{2GM_p \left(\frac{1}{r_{P_p}} - \frac{1}{2a} \right)} = \sqrt{\frac{GM_p}{p}}(1-e) \end{cases}$$

2. Voyage interplanétaire de BepiColombo

2.1. Le référentiel héliocentrique dont le centre est le barycentre du soleil et les axes pointent vers trois étoiles lointaines.

Pour le considérer galiléen, il faut que la durée de l'étude soit très inférieure à la période de révolution du soleil autour du barycentre de la galaxie.

2.2.



2.3.

$$E_m = -\frac{GmM_s}{2a} = \frac{1}{2}mv^2(r) - \frac{GmM_s}{r} \Rightarrow v(r) = \sqrt{\frac{2GM_s}{r} \left(1 - \frac{r}{2a} \right)}$$

2.4. Sur l'orbite de HOHMANN, l'engin spatial *n'utilise presque pas* les moteurs, contrairement à une orbite de transfert sécante à l'orbite de Mercure où il est nécessaire d'actionner les moteurs pour changer la vitesse et la direction de l'engin.

2.5.

$$d_{H,P} = r_M \quad \text{et} \quad d_{H,A} = r_T$$

$$2a_H = r_M + r_T \quad \Rightarrow \quad a_H = \frac{r_M + r_T}{2}$$

Application numérique: $a_H = 99 \times 10^6 \text{ km}$

$$r_M = \frac{p}{1 - e_H} \quad \text{et} \quad r_T = \frac{p}{1 + e_H} \quad \Rightarrow \quad e_H = \frac{r_T - r_H}{r_T + r_H}$$

Application numérique: $e_H = 0,54$

2.6.

$$\Delta V_A = V_{H,A} - V_T \quad ; \quad \Delta V_P = V_M - V_{H,P} \quad ; \quad v(r) = \sqrt{\frac{2GM_s}{r} \left(1 - \frac{r}{2a}\right)}$$

$$V_{H,A} = \sqrt{\frac{2GM_s}{r_T} \left(1 - \frac{r_T}{2a}\right)} \quad \text{et} \quad V_{H,P} = \sqrt{\frac{2GM_s}{r_M} \left(1 - \frac{r_M}{2a}\right)}$$

$$V_T = \sqrt{\frac{GM_s}{r_T}} \quad \text{et} \quad V_M = \sqrt{\frac{GM_s}{r_M}}$$

$$\begin{aligned} \Delta V_A &= V_{H,A} - V_T \\ &= \sqrt{\frac{2GM_s}{r_T} \left(1 - \frac{r_T}{2a}\right)} - \sqrt{\frac{GM_s}{r_T}} \\ &= \sqrt{\frac{GM_s}{r_T}} \left(\sqrt{2 - \frac{r_T}{a}} - 1 \right) = \sqrt{\frac{GM_s}{r_T}} \left(\sqrt{\frac{r_M}{a}} - 1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta V_P &= V_M - V_{H,P} \\ &= \sqrt{\frac{GM_s}{r_M}} - \sqrt{\frac{2GM_s}{r_M} \left(1 - \frac{r_M}{2a}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{GM_s}{r_M}} \left(1 - \sqrt{2 - \frac{r_M}{a}} \right) = \sqrt{\frac{GM_s}{r_M}} \left(1 - \sqrt{\frac{r_T}{a}} \right) \end{aligned}$$

2.7.

$$\Delta t_{A \rightarrow P} = \frac{T_H}{2} \quad \text{avec} \quad \frac{T_H^2}{a_H^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s} = \frac{T_T^2}{a_T^3} \quad \Rightarrow \quad \Delta t_{A \rightarrow P} = \frac{T_T}{2} \left(\frac{a_H}{a_T} \right)^{3/2}$$

Application numérique: $\Delta t_{A \rightarrow P} \approx 0,26 \text{ ans} \approx 96 \text{ jours}$

2.8. L'assistance gravitationnelle est l'exploitation de l'énergie due à la gravitation pour qu'un engin spatial puisse changer sa vitesse et sa direction.

3. Motorisation de la sonde BepiColombo

3.1. $F = ma$: s'exprime en kgms^{-2}

$D_m = \frac{dm}{dt}$ est en kg s^{-1} et u (vitesse) en ms^{-1} ,

le produit $[D_m \times u]$ s'exprime, alors, en kgms^{-2} .

L'expression $F = D_m u$, est bien *homogène*.

Un raisonnement par analyse dimensionnelle est aussi valable!

3.2. Le théorème de l'énergie cinétique à un ion Xe^+ de charge q_i , entre la grille (G_i) et une position x :

$$\underbrace{\frac{1}{2} m_i u_i(x)^2 - 0}_{u_i(x=0)=0} = \underbrace{\int_0^x q_i \vec{E} \cdot d\vec{x}}_{\text{et } V(x=0)=0} = 0 - q_i V(x) \Rightarrow u_i = \sqrt{\frac{-2q_i}{m_i} V(x)}$$

3.3. Le débit massique D_m :

$$D_m = m_i n_i(x) u_i(x) S$$

3.4. L'équation vérifiée par $V(x)$:

$$\Delta V(x) + \frac{\rho_i(x)}{\epsilon_o} = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{matrix} \rho_i(x) = n_i(x) q_i \\ \text{la densité volumique} \\ \text{de charges ioniques} \end{matrix}$$

l'équation de Poisson

soit:

$$\frac{d^2 V(x)}{dx^2} + \frac{n_i(x) q_i}{\epsilon_o} = 0$$

3.5. Le débit massique, en $x = d$, dans l'approximation;

$$\frac{d^2 V(x)}{dx^2} \approx -\frac{U_o}{d^2} = -\frac{n_i(x) q_i}{\epsilon_o} \Rightarrow D_m = m_i u_i(x) S \frac{\epsilon_o U_o}{q_i d^2}$$

$$D_m = S \frac{\epsilon_o U_o}{d^2} \sqrt{\frac{2m_i}{q_i} U_o} = S \frac{\epsilon_o U_o^{3/2}}{d^2} \sqrt{\frac{2m_i}{q_i}}$$

3.6. L'intensité de la force de poussée \vec{F} est:

$$F = \|\vec{F}\| = D_m u_i = S \frac{\epsilon_o U_o^{3/2}}{d^2} \sqrt{\frac{2m_i}{q_i}} \sqrt{\frac{2q_i}{m_i} U_o} = 2S \frac{\epsilon_o U_o^2}{d^2}$$

3.7. La puissance électrique minimale que doit fournir le générateur est:

$$P_{em} = U_o \times I_i \quad \text{avec} \quad \begin{matrix} I_i: \\ \text{l'intensité du courant engendré} \\ \text{par le mouvement des ions} \end{matrix}$$

$$I_i = \frac{D_m}{m_i} q_i \Rightarrow P_{em} = \frac{U_o q_i}{m_i} S \frac{\epsilon_o U_o^{3/2}}{d^2} \sqrt{\frac{2m_i}{q_i}}$$

Soit:

$$P_{em} = S \frac{\epsilon_o U_o^{5/2}}{d^2} \sqrt{\frac{2q_i}{m_i}}$$

3.8. Le carburants pour les moteurs ioniques doit être ionisable! C'est le cas du césium, du sodium et de xénon (*point commun*).

♦ Dans les moteurs ioniques, on cherche à augmenter la force de poussée $F = D_m \times u_i$ et diminuer la puissance consommée (*inversement proportionnelle à $\sqrt{m_i}$*): c'est le cas pour le xénon Xe et le césium Cs et pas pour le sodium Na .

♦  Xe est *inerte chimiquement*: il ne présente pas de danger sur le moteur et ces accessoires (*n'est pas corrosif électrochimique*) contrairement au césium.

Le dernier de ces deux critères fait déjà la différence (*critère majeur*): d'où le choix du xénon.

3.9. Le gaz éjecté doit être électriquement neutre, pour éviter le *retour* des ions, et donc, *perte* de puissance et par conséquent *freinage* du vaisseau spatial.

4. Sonde MPO

4.1. Trajectoire

4.1.1. Le référentiel *mercurocentrique* est le référentiel dont le centre est le barycentre de la planète Mercure et les trois axes sont parallèles à ceux du référentiel de Copernic.

4.1.2. La période de révolution:

$$T_{MPO} = \frac{2\pi r_{MPO}}{v_{MPO}} \quad \text{et} \quad m \frac{v_{MPO}^2}{r_{MPO}} = \frac{GM_M m_{MPO}}{r_{MPO}^2} \quad \Rightarrow \quad v_{MPO} = \sqrt{\frac{GM_M}{r_{MPO}}}$$

$$T_{MPO} = 2\pi r_{MPO} \sqrt{\frac{r_{MPO}}{GM_M}}$$

Application numérique: $T_{MPO} = 8377 \text{ s} = 2,33 \text{ h} = 2 \text{ h} 19 \text{ mn} 48 \text{ s}$

4.1.3. La sonde *MPO* est mise sur une orbite polaire afin de balayer toute la surface de la planète Mercure en tenant compte de la rotation propre de ce dernier.

4.1.4. A chaque révolution de la sonde *MPO*, la zone de la surface de Mercure observée n'est pas la même car la sonde n'est pas sur une orbite «*mercurostationnaire*».

4.2. Télescope de Schmidt-cassegrain, perte d'image

4.2.1. L'approximation de l'optique géométrique consiste à considérer les dimensions caractéristiques des instruments optiques grandes devant la longueur d'onde.

4.2.2.

- Conditions de Gauss:
 - Rayons lumineux proches de l'axe optique.
 - Rayons lumineux peu inclinés par rapport à l'axe optique.
- Dans ces conditions, le *stigmatisme approché* est réalisé ainsi que l'*aplanétisme approché*.

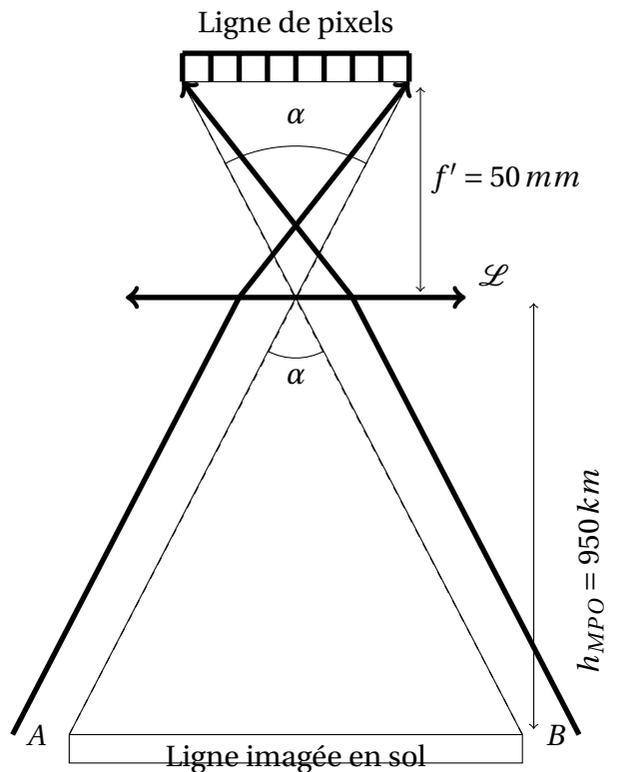
4.2.3.

4.2.3.1. quelques particularités du télescope de Schmidt:

- Existence d'une lentille qui corrige les aberrations.
- L'imagerie spectrale dans le domaine de l'infrarouge.

4.2.3.2. Pour une observation optimale, il faut placer le capteur dans le *plan focale* du (télescope).

4.2.3.3. Image de la ligne imagée à la surface de Mercure par le télescope:



4.2.3.4. Dimensions $L = AB$ de la ligne imagée à la surface de Mercure par la ligne de pixel. D'après le schéma ci-dessus:

$$\alpha = \frac{L}{h_{MPO}} = \frac{N_p \delta}{f'} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{N_p \delta h_{MPO}}{f'} \quad \text{et} \quad l = \frac{L}{N_p} = \frac{h_{MPO} \delta}{f'}$$

Application numérique;

$$L = 79,80 \text{ km} \quad \text{et} \quad l = 665 \text{ m}$$

4.2.3.5. La résolution numérique spatiale \mathcal{R}_{num} du télescope:

$$\mathcal{R}_{num} = l = 665 \text{ m}$$

4.2.4.

4.2.4.1. La loi de WIEN:

$$\lambda_{max} \times T \approx 3 \text{ mm.K}$$

Pour le rayonnement émis par la planète Mercure:

$$\lambda_o \times T = 440 \times 10^{-5} = 4,4 \text{ mm.K} \neq 3 \text{ mm.K}$$

La loi de WIEN n'est pas vérifiée par un tel rayonnement.

4.2.4.2. Le temps τ durant lequel est vue une zone donnée de la surface de Mercure par *un pixel*:

$$\tau = \frac{l}{v}$$

Application numérique:

$$\tau = \frac{665}{2,6 \times 10^3} \approx 0,26 \text{ s}$$

4.2.4.3. Nombre N_{photon} de photons reçus par un pixel provenant d'une zone donnée de la surface de Mercure:

$$\Phi_{px} = \frac{N_{photon} \times h\nu}{\tau} = \frac{N_{photon} \times hc}{\lambda_o \tau} \Rightarrow N_{photon} = \frac{\lambda_o \tau}{hc} \Phi_{px}$$

Application numérique:

$$N_{photon} = 6,67 \times 10^9 \sim 10 \text{ milliards de photons}$$